カントと幾何学の公理

倉 持 武

I．問　　題

幾何学は「一つの偉大な，確証された認識」である。それはまた「完全に確然的な確実性，すなわち絶対的な必然性をともない，それゆえ，何ら経験的根拠に依存せず，したがって理性の純粋な産物であり，しかもなお完全に総合的である(prol.B33)」とカントによって規定される幾何学は，「そのすべての概念を具体的に in concreto，しかもアプリオリに呈示しうるような，いいかえれば，概念を構成しうるような何らかの純粋直観(prol.B34)」を基礎として成立する(1)。ところで，この純粋直観としての空間と時間は，カントによれば，「客観の直接的表象」つまり直観を得る「主観の形式的性質」であり，同時にまた，「現象の形式」である。それゆえ，空間と時間が示して見せるのは「何らかの諸物自体の性質」，あるいは，「それらの相互関係における諸物自体」ではない(A26/B42)。つまり，空間と時間の存在規定として，両者には経験的実在性と同時に超越論的観念性が帰せられるのである(A28/B44)。

それゆえ，「空間の諸固有性を，総合的に，しかもアプリオリに規定する一つの学(B40)」である幾何学は，その客観的実在性（妥当性）を空間の超越論的観念性に負っているのである。

「超越論的感性論」において与えられ，以上の如き大略をもつ，カントの幾何学観は，当時ゲッティンゲン大学を中心に活発に議論されていた平行線問題に大きな刺激を与え，『純粋理性批判』第一版の公刊（1781年）以後，幾何学基礎論に関する論文数を二倍以上に飛躍させた。以後，タウリヌス，ボヤイ父子，ガウスを含めて，カントの幾何学論との対決なしに幾何学について語ることを不可能にするほどの影響を与えたのである(2)。

ところで，複数の非ユークリッド幾何学の成立，およびヒルベルトによる形式主義的公理系の確立，を契機として，カントの「アプリオリな総合判断」という幾何学の性格規定に対して，批判の声が多くあがるようになってきている。ヒルベルト以後に限ってみれば，この批判の中心的思想は，幾何学の二分法，つまり，幾何学は，純粋幾何学としてはアプリオリではあるが分析的であり，応用幾何学（経験の対象としての物理的世界において妥当性をもつ幾何学）としては総合的ではあるがアポステリオリである，という考えである。こうした立場をとる者として，例えば，岩崎武雄(3)，秋間実(4)，ライヘンバッハ(5)などが挙げられる。

これに対し，非ユークリッド幾何学の草創期の人々は，ヒルベルト以後の幾何学観とは異った思想をもっていた。純粋幾何学としてのユークリッド幾何学は，「空間一般」および「産出的構想力が空間の中に描き出す形態」に関して(A157/B196)，つまり「対象の形式」に関して(B147)，アプリオリな総合判断において認識せしめるのみであって，これだけではそれが「認識」であるのか「単なる幻想」であるのかを区別することができないとするカントの思想(A157/B196)，および，同じくカントの「空間の唯一性」の思想(A25/B39)が，彼らの間には強く生きていた。幾何学は「実践的に，実在論的(6)」に理解されていたのであって，カントの幾何学観に即していえば，むしろ，幾何学のアプリオリ的性格が批判されていたのである。こうした思想は，下

に引用する，1832年４月６日付，ガウスからボヤイ・ファルカシュに宛てた手紙からも読みとることができる。

「まさしくユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学とのいずれかに，アプリオリに決定できないということのうちに，空間がわれわれの直観の形式にすぎないとカントが主張したのが，不正当であるということの最も明瞭な証明があります(7)」。

他方，カントの幾何学観に対して肯定的評価を与える者達も多数存在する。非ユークリッド幾何学の成立することに関しては，これがカントの思想と何ら矛盾するものではなく，ナトルプ，マイネッケ，ネルソンなどが，カント的前提のもとで非ユークリッド幾何学を想定することの単に可能的であるばかりではなく，むしろ，必然的であることを明確に示していることを確認したマルチンは，これらの人々の主張を，「それが正しいということに疑いはありえない」と強く断定している(8)。また，特殊相対性理論の成立に対しては，カッシーラー等が，そして，一般相対性理論の成立に対しては，ベッカー，あるいはディングラー等が，それぞれカントの思想を擁護し続けようと努めている(9)。

さて，カントの幾何学観は，以上の如き様々な評価を与えられているが，この評価の差異はそれぞれの論者のもっている幾何学観，特に彼等の公理観の差異によって説明され得よう。それゆえ，われわれ自身のカントの幾何学観に対する評価を確立する第一歩として，カントの公理観を研究する必要性の存することは明らかであろう。以下，まずＩにおいて，ユークリッド以来の公理観の変遷の大略をみながら，カントの主張する公理の総合的性格の妥当性を検討し，IIにおいて，カントのこの主張の「楔」としての非ユークリッド幾何学の可能性について考えてみたい。

II．相異なる公理系

ユークリッドの『原論』における，定義，公準（要請あるいは存在措定ともいわれる。また，公理と公準を区別しない立場からは公理ともよばれる）および公理（共通概念ともいわれる）に基礎をおく証明方法の成立は，「人間精神史上の一つの重大な出来事(10)」である。『原論』第一巻第五定理，つまりターレスの定理として知られる二等辺三角形の論証にこの公理的方法成立の端初をみるカントも，このことの意義を十分に認めている(BXI)。

しかし，残念なことではあるが，人類全体の模範的テキストである『原論』の中で示されている公理的方法はきわめて不徹底なものであることを確認しなければならない。『原論』は，まず定義，公準および公理を設定し，これらのみを前提として，形式論理学（直接証明としては modus ponens，間接証明としては背理法）を手段として，諸命題（これは作図題と定理とに分けられる）を証明するという形式をとっている。けれどもこの証明に関して，前提と帰結との伴立関係を分析してみると，両者の間には純論理的演繹関係が，そもそも第一命題における場合からして，成立していないことがわかるのである。こうした事態を具体的に示すために，『原論』第一巻第四命題，いわゆる「二辺夾角の合同定理」をとりあげてみよう。第一命題から第三命題まではすべて作図題であるので，これは『原論』にあらわれる最初の定理の証明題である(11)。この定理の証明のもつ形式は『原論』の証明構造一般を典型的に示しており，次のごとく分析されよう．

1．証明されるべき定理が一般的形式において述べられる（命題)。
2．証明されるべき定理が記号をつけた特定の形式において述べられる（特述)。
3．証明が，modus ponens および背理法を駆使して，具体的に遂行される（証明)。
4．証明されるべきであった定理が繰り返され，「これが証明すべきことであった」として，定理の真が主張される（結論)。

ところで，この証明において，前提として与えられている定義，公準，そして公理には含意されていないものが使用されているのである。例えば，「三角形ＡＢＣを三角形ＤＥＦに重ねる」ことを論理的に可能にする「運動群の自由性」の公理(12)，あるいは，三角形ＡＢＣと三角形ＤＥＦを重ね，

与えられた条件から，辺ＡＢとＤＥおよびＡＣとＤＦとがそれぞれ重なることを確認し,「点ＢとＥおよびＣとＦとがそれぞれ重なるのであるから，底辺ＢＣとＥＦも重ならなければならない。もし重ならないとすれば，二つの線分が面分を囲むことになるが，それは不可能であるからである(13)」という個所において，この不可能性を論理的に基礎づける「二直線は面分を囲まない」という公理，つまり「異なる二点を通る直線の一意的存在」の公理，が密かに用いられているのである(14)。

さて，ユークリッドの与えている定理の証明は，そこに添えられている「図」によって隠されてはいるのであるが，上で明らかにした如く，論理的には欠陥をもっている。それにもかかわらず，依然としてそれが「証明」として通用しているのは，そこに欠けているものが「図」における直観的自明性によって補塡されるからに他ならない。「異なる二点を通る直線の一意的存在」は，直観的に自明とみなされているのである。しかし，論理的欠陥を直観的自明性をもって補うことが認められるならば，公理的方法はその意義を失い，「そうした直観にたよってよいならば，要請や共通概念に述べられていることもみな〈明らか〉であって，書き挙げておくまでもなかったことになる(15)」という批判にさらされることになろう。ヒルベルトが理想とするように，理論が公理的体系として示されるべきであるならば，公理と定理との，つまり前提と帰結との演繹関係は厳密なものでなければならない。公理あるいは公準として与えられていないものは，証明の過程において，「直観的自明として密輸入(16)」されてはならないのである。

ユークリッドの『原論』において密かに用いられていた「直観的に自明」なものを分析し，基本概念 Kernbegriffe および基本命題 Kernsätze から，論理的手段のみをもって厳密に，諸定理を導出する体系，精密なるユークリッド幾何学公理体系を築き上げた者はパッシュであった(17)。しかし，精密な公理的方法の適用を受けたこのパッシュの体系においても，基本概念および基本命題を選択する際には，われわれの空間的幾何学的直観が働いているのである。つまり，パッシュの「基本命題系によって証明のうちからは直観への依存を除き得たとするも，その基本命題，すなわち公理とその概念構成のうちには，直観的なものが依然として混入している(18)」のである。

幾何学のパッシュ的段階においては，それゆえ，幾何学的判断の総合的性格は依然として，明らかな形で，堅持されているといえるのである。そして，パッシュの体系において公理と定理および推論規則との間に成立する関係は，カントが幾何学的判断の総合的性格に関して次の如く説明するとき，同時に完璧な仕方で説明しつくされるのである。

「純粋幾何学のいずれの原則も分析的(B16)」ではない。幾何学が「前提するいくつかの少数の原則は，なるほど実際に分析的であり、矛盾の原理にもとづいている。しかしそれらの諸原則は，同一の原理と同様，ただ方法の連鎖にだけ役立つのであって，原理として役立つ(B16)」わけではない。ところで,「数学者達の推論はすべて矛盾の原理にしたがって進められるということ（このことをあらゆる確然的確実性は要求する）がわかったゆえ，数学の諸原則もまた矛盾の原理にもとづいて認識されるものと思いこまれている(B14)」けれども，しかしこれは誤りである。総合判断も「もちろん矛盾の原理にしたがって洞察されるが，しかしそれは，その命題がそれにもとづいて推論されうる別の総合的命題が前提されているときだけであって，けっしてそれ自体そのものにおいてではない(B14)」のである。

幾何学が堅持し続けてきた総合的性格を失うのは，ヒルベルト的段階においてであるようにみえる。ヒルベルトにあってもなお「幾何学」は，「われわれの空間的直観を論理的に分析することに他ならない(19)」として，そこでは「直観」が尊重されているのであるが，「直観」は公理系そのものからは排除されているのである。『幾何学基礎論』において不確定概念として，それゆえ定義されずに与えられ，それぞれが点，直線，平面と名づけられている「物の三種の相異なる集合 System」は，「テーブル，椅子，ビールコップ」と名づけられようともさしつかえがなく，これら三種の集合は

その言葉のもつ経験的意味をすべて剝奪されており,「確定した意味」つまり「特定の対象や特定の関係」を表わすものではなくなっているのである。さらに,ヒルベルトがそこで与えているＩ群からＶ群におよぶ二十個の公理も,上の三種の集合の間にある「いくつかの相互関係」を表わす「横たわる」,「間」,「平行」といった関係を記述することによって,不確定概念の表わしうる対象および関係の範囲を限定する(内含的に定義する)働きをするのみである。それゆえ,「われわれの知識の内容を決定的に記述し且完全に論理的に保証する(20)」公理的方法によるヒルベルトの体系においては,単に証明の過程からのみならず,無定義語の選択に際しても,さらには公理の設定に際しても,直観への依存は完全に取り除かれており,「幾何学」は純粋に仮説的な公理の基礎の上に築かれる演繹体系となったのである。そしてまたヒルベルトのこうした思想に導かれて,ヴェブレンやハンティントンの体系に代表されるが如き,それぞれ異った不確定概念とそれに対応した公理系をもつ種々の体系が産み出されてきたのである。

こうしたヒルベルトの幾何学の形式的公理化によって,幾何学の体系内から「直観的自明性」が完全に追放され,幾何学の「真理性」は,公理系の無矛盾性にとってかわられたのである。幾何学は特定の対象に関わること,つまりその対象に関する真なる諸命題の体系であることを止め,即自的にはその「窓」を閉じてしまったのである。

さて,ヒルベルトのこの形式主義はカントの公理観を否定するものであろうか。カントが幾何学の諸原則の総合的性格を主張したとき,それはライプニッツの公理観,つまり,ユークリッド幾何学の公理は定義と矛盾律とから証明可能であって,それゆえこの幾何学は論理的にも唯一可能なものであるという思想,を否定したことを意味する(21)。それゆえ,カントの公理の総合的性格のテーゼは,幾何学のパッシュ的段階のみならず,ヒルベルト以後の抽象幾何学の発展をふまえてもなお依然として否定されてはいないのである。抽象幾何学においては,ある体系において措定される公理系そのものも,また公理的体系全体としても,即自的には真理に関して中立である。いいかえれば,抽象幾何学は,それだけとり出してみる場合,「空間の根本的構造の本質的洞察(22)」であることを止めてしまっている。しかし,それが「幾何学」である限りは,つまり,その公理が不確定概念間の関係を論理的に真なるものとして措定するのではなくて,矛盾律から導出され得ない何らかの構造的連関を表現しているのである限りは,そしてたとえそれがそれだけでは「認識」であるのか,「単なる便宜」であるのか,あるいはそれとも「構想力の単なる戯れ,幻想」であるのか区別がつかないとしても,その公理は「創造的思惟による自由な措定(23)」なのである。そしてここで示される公理およびそれにもとづく幾何学の総合的性格こそが,複数の表現形式をもつユークリッド幾何学のみならず,ユークリッド空間の部分空間に関する射影幾何学およびアフィン幾何学,そして正・負および可変の曲率をもつ非ユークリッド幾何学など数的にも豊かな幾何学の成立を基礎づけているのである。複数の公理系それゆえ複数の幾何学の成立は公理の総合的性格を前提するのである。

III　互いに矛盾する公理系

カントが公理の総合的性格を確信するに到るのはいかなる幾何学思潮の中においてであったのであろうか。カントはすでに非ユークリッド幾何学の可能性を知らされており,この可能性の上に立って公理の総合的性格を確信するに到ったのであろうか。カントの立場は,その公理観に関しては非ユークリッド幾何学の可能性を否定するものではない。さらに,カントが「二直線によって囲まれている図形という概念には矛盾が含まれていない。二直線とその接合という概念は図形の否定を含まない(A220/B268)」と主張するとき,これは「異なる二点間を通る直線の一意的存在」を示す公理,つまり,――これはリーマンによって初めて明らかにされたことであるが――ユークリッド空間における直線の特性を規定し,正の定曲率空間からユークリッド空間を区別する公理(24)の否定の無矛盾性を主張していることになるのである。また,

マルチンはカントと非ユークリッド幾何学の関連を主張するために「非ユークリッド幾何学の先駆者」，サッケーリおよびランベルトを引きあいにだして次のようにいう。

サッケーリは，ユークリッドの平行線の公準を仮りに否定して，「〈四角形の内角の総和は四直角よりも小である〉と仮定するのである。彼が非常に驚いたことには，彼はこの〈誤った〉前提から長い一連の結果を発展させることができたのであり，所期の矛盾はずっと後になってはじめて示されるということが分ったのである。この研究を吟味してみるとすぐ次の結果が生じてきた。つまり示された矛盾というのは推理の誤謬に基づくものであって，〈誤った〉前提から生ずる結果は，むしろ知り得る限り矛盾のないものであったのである。したがって〈三角形の内角の総和は二直角よりも小である〉という前提に立っても，〈三角形の内角の総和は二直角に等しい〉という前提の上にユークリッドの体系が組み立てられるのとちょうど同じように，定理の体系を組み立てることができるのである。この洞察によって最初の非ユークリッド幾何学が発見された。最初のこの主張者達の一人は，ベルリンの数学者でありカントの友人であるランベルトであった(25)」。

ところで，近藤洋逸は，マルチンのこの指摘を真向から否定する形で次の如く主張している。「直角仮定の幾何学が真であるばかりか，それのみが真であり，さらにそれのみが思惟可能であるというのが，サッケーリと同じくランベルトの信念である(26)」。

さて，カントはマルチンの示唆する如く，公理の総合的性格を確信する「楔」としての非ユークリッド幾何学の可能性を知らされていたのであろうか。それとも近藤の主張から帰結する如く，そのような機会は与えられておらず，他の何らかの考察にもとづいて，あの確信に到達したのであろうか。以下，サッケーリとランベルトの思想の大略をみながらこの問題を検討することにしよう(27)。

周知の如く，「平行線の公準」——これはまた第五の要請とも，あるいは公理と公準とを区別しない立場からは第十一公理ともよばれる——は，これを除く四つの公準およびすべての公理(28)と比較すると，「その定式化が複雑である」ばかりでなく，否定の形式をもつ平行線の定義（第二十三定義）におけると同様，「限りなく」という直観的自明性に欠ける表現が使用されている。平行線の公準における自明性の欠除には，ユークリッド自身も気づいていたのか，彼は第一巻第二十八命題まではこの公準から独立に成立する諸命題のみを挙げている。また早くもプトレマイオスによって，この公準を「証明」しようとする試みがなされているのである(29)。

かくして平行線の問題は第五の公準の「公準」としての地位に対する疑惑に端を発し，この公準をその他の「自明」な公準から直接的に証明しようとする方向に展開してゆく。ところでこの場合，その「自明性」に関して疑惑を招いたのはあくまでも第五の公準のみであって，他の公準はすべてその自明性を疑われたことはかつてなく，こうした事態は，リーマンによるユークリッド幾何学の公理および公準の相互関連の研究を通して，すべての公理・公準から自明性が剝奪され，「仮説」とみなされるに到るまで(30)，一度として変ることはなかったのである。それゆえ，幾何学者達が，ただ一つだけ疑惑を招いている平行線の公準をなにはともあれ「証明」することによってその体系を完全無欠なものに仕上げようという見果てぬ夢を，2000年間にわたって抱き続け，「平行線公理の証明はいろいろの仕方で明敏な数学者達によって試みられてきたが，今日にいたるまで完全には見出されませんでした。それが失敗する限り，その命題およびそれに基づくすべてのものは仮定にとどまり，それの普遍必然的正当性は矛盾なしに疑うことができましょう(31)」と思い続けてきたことは，充分に理解されるところである。平行線の公準の証明の試みは，1770年までに，その数7,000以上におよぶことが報告されている(32)。

さて，2000年におよぶ平行線の歴史において，平行線問題の「完全に新しい側面を発見するという不滅の功績(33)」を残した者が，エスイッタ派の僧であり，パビア大学の数学教授サッケーリ

Girolamo Saccheri (1667～1733) である。彼は，主著『あらゆる汚点から清められたユークリッド，一名，幾何学の原理の基礎づけのための幾何学的試論』(1733) において，「ユークリッド幾何学を唯一可能な幾何学として証明(34)」しようと試みるのである。彼は，平行線の公準を，プトレマイオスの如くユークリッド幾何学の他の諸公準から，あるいは，プロクロスやボレリの如く別のより自明と思われる代替的公準から，それぞれ直接に導出しようとする多くの試みが，彼が検討した限りではすべて論理的欠陥をもっていることを明らかにし(35)，これを通して，平行線の公準が「根本的真理」であるがゆえに，他の命題からの導出でもってその真を直接に証明することはできない，という確信をもつに到る(36)。

サッケーリはここから，平行線の公準を単なる事実上の真理あるいは一つの基本仮定として把握するという方向をとることはなく，ギリシア以来の，つまりアリストテレス的公理・公準観(37)を堅持し，平行線の公準の自明性の不足を，その論理的必然性の間接的証明を通して補完する方向を選ぶのである(38)。「根本的真理は，これの反対の真が根本的に反駁されることによってのみ，それの古くからの権利を再確保できるということのなかにこそ，すべての根本的真理のいわば性格といったものがある(39)」という思想のもと，「ユークリッドがかの有名な公理を，それ自身において明白なものだと想定したことは充分の理由をもっている(40)」ことの証明を目的として，平行線公準の間接証明を企てるのである。この間接証明は背理法を使用するものである。すなわち，これは，平行線の公準を否定する「鈍角仮定」および「鋭角仮定」を設定し，それぞれの仮定とユークリッドの他の「自明」なる四つの公準とを組み合わせた二種の公理系を措定し，それぞれの公理系からそれぞれ矛盾を導出することを通して，「直角仮定」つまりユークリッドの平行線の公準の論理的必然性を証明しようとするものである。

この証明の内容は小論では省略するが(41)，サッケーリ自身は，この証明をもって彼が目的としたところのものを完璧に達成することができたとかたく信じていた。彼はまず鈍角仮定に関して，この仮定の成立すること自体が，それを否定する直角仮定の真を論理的に導出するがゆえに，「鈍角仮定は自己自身を破壊するがゆえに完全に偽である(42)」ことを定理十四として証明する（定理十一および十二の証明において，正の曲率をもつ幾何学においては成立しないアルキメデスの公理が密かに使用されている(43)）。続いて彼は鋭角仮定に関して，この仮定が成立すれば，二本の直線が（有限に延長するにせよ，無限に延長するにせよ）結局一本の直線に合流するという矛盾，また，二本の相交わる直線がこの交点において，同一平面上にある第三の直線と直角に交わるという矛盾が生じるがゆえに，鋭角仮定は「直線の本性 die Nature der geraden Linie に反するがゆえに完全に偽である(44)」ことを定理三十三として証明する（有限のところで成立する幾何学的性質がそのまま無限遠点にもちこまれる(45)）。ところで，「直線の本性に反するがゆえに完全に偽」として鋭角仮定を否定することからは，直角仮定の真の論理的必然性はでてこない。それゆえサッケーリは定理三十三に満足することなく，「私がすでに根本から引抜いた鋭角仮定という不柔順な仮定を，自己自身に矛盾するものとして証明するためには，何事も試みずにはおかないつもりである(46)」という決意を固め，ついに「鋭角仮定は自己自身を破壊するがゆえに完全に偽である(47)」ことを定理三十八として証明することに「成功」するのである。

現代の観点（少くともガウス以後の観点）からみれば，サッケーリは，正の曲率をもつ空間の幾何学にあたる鈍角仮定，および負の曲率をもつ空間の幾何学にあたる鋭角仮定からそれぞれ矛盾を導出する過程において，特に後者の過程において，いくばくかの，非ユークリッド幾何学の諸定理に対応するものとみなし得る成果をあげている。しかしながら，上で明らかにした如く，サッケーリは自己自身で遂行した鈍角・鋭角両仮定の論駁は，たとえその表現が「明晰でもなく優雅でもない(48)」とはいえ，完全に正しいとかたく信じきっていたのである。彼は非ユークリッド幾何学の公準が論理的に矛盾するものであることを，した

がってまた，ユークリッド幾何学の公準の真の論理的必然性すなわちユークリッド幾何学の論理的唯一可能性を確信していたのである。

サッケーリが両仮定において導出したいわゆる「矛盾」が，定理十四および三十三に関しては「無限の許されざる使用」に，定理三十八に関しては「点の運動を通しての曲線の産出に関する正当でない表現」に，基づいて誤って導出されたものであることは，クリューゲルの平行線の歴史に関する学位論文（1763）によって初めて明らかにされたことである(49)。そして，ランベルトがこの「学位論文」を所持していたことが，1773年7月3日付でクリューゲルに宛てた彼の手紙の中で示されており，こうしてわれわれは，サッケーリとランベルトの連がりがクリューゲルの「学位論文」を介するものであることを確認することができるのである(50)。

さて，ランベルトは『平行線の理論』を1776年に著わしたのであるが，自分では出版せず，彼の死後，1786年にヨハン・ベルヌーイによって出版されるまで，それは人に知られるところではなかったのである。『平行線の理論』は三章からなっているが，その構成は次の如くである。第一章「予備的考察」（十一節まで）においては，ユークリッド第十一原則（第五の公準）の証明に関し，そこで問題となっていることがらの意味が考察される。第二章「それ自身で考察されうる若干の諸命題の検討」（十二節から二十六節）においては，平行線の公準から独立に証明され得る諸定理が研究される。そして第三章「平行線の理論」（二十七節から最終八十八節）において，第一仮定（サッケーリの直角仮定にあたる），第二仮定（サッケーリの鈍角仮定にあたる），および第三仮定（サッケーリの鋭角仮定にあたる）がそれぞれ検討され，第二および第三仮定の成立しないことが証明される。

ランベルトは公理と公準とを区別せず，カントと同じく，両者を原則 Grundsatz の名のもとにまとめて示しており，ここからユークリッド幾何学は，ランベルトにとって，定義・原則および定理からなる体系としてみなされていることがわかる。ランベルトによれば，定義はそれ自身としてみられれば，何ら内容あるもの Subjekt ではなく，単なる仮定 Hypothese にすぎない(51)。これに対して原則は「全く単純な，したがってそれ自体として思惟可能な諸概念から構成されるべきものであり，これらの概念が互いに結合しうるのか否か，および，いかなる点において結合可能であるのかは，それら概念の表象 Vorstellung der Begriffe から直接に明らかにされ(52)」なければならないものである。こうした要請をみたす原則は（読みとれる限りでは）十二個与えられており，その特性上，三種に分類され得る。第一群は，同等性および不等性の概念にかかわるものであって，最大の部分を占める。この群に属する原則は関係概念 Verhältnisbegriff から成る原則であって，証明における推論の形式 Form にのみかかわり，内容 Materie にはかかわらない(53)。第二群は，否定文の形式をもつもので証明が間接的 apagogisch である場合にのみ，つまり定理の真理性がその反対の不可能性から証明される場合にのみ用いられる原則である。ランベルトの第十二原則「二直線は面分を囲まない」がこれに属する(54)。第三群は，肯定的な形式をもちかつ図形に直接にかかわる範疇を含む唯一の原則である。ランベルトの第十一原則つまりユークリッドの第五の公準のみがこの群に属する。

ところで，ランベルトによれば，第十一原則は，平行線の定義と共に，それらの記述する事態の過不足のない認識根拠およびこの事態の存在根拠とを，第二十八定理までに完全に与えられている(55)。それゆえ，多くの幾何学者が，その上になお平行線の原則の「証明」を追い求めたのは，彼らがユークリッドその人の立場とは異った立場に立っていたからに違いないのである。彼らは「ユークリッドの原則を証明するためには，あるいは一般的に幾何学を確立するためには，見たり Sehen あるいは事態そのものについて表象したり von der Sache selbst eine Vorstellung machen することは許されない(56)」と考えていたのである。したがって，単なる「言葉 Worte」ではなく，「事態の思惟可能性と表象 die Vorstellung und die Denkbarkeit der Sache(57)」を前提するならば，

ユークリッドが平行線の公準を「原則」として措定し，それに何らの証明も与えていないことには全然問題はないのである(58)。もし平行線公準の真理性を疑う者があるならば，彼は同時に他の自明な諸原則をも疑うべきであるのだが，ユークリッドの立場，つまり「事態の現実的表象(59)」を前提する立場に立つならば、これは不可能である。平行線の公準に関して，その「真理性 Wahrheit」も「思惟可能性」も何ら問題とはならないのである(60)。

しかし，平行線の公準に関して，それの他の諸原則からの独立性およびより自明性をもった同値な原則の存否とは，問題となりうるのである(61)。ところで，平行線の公準に関してだけこのような問題が生じ得るのは，この公準が「内容」にかかわり，同時に，「無限概念」を含む唯一の原則であるからなのである(62)。そして，この公準が無限概念を含むがゆえに，この問題を，「アポステリオリに，そして抽象作用(63)」をもって，解決することはできないのであるし，「事態の可能性を他の単純な諸原則から証明(64)」しようとこれまでなされてきた試み，つまり平行線公準の直接的あるいは間接的証明が，クリューゲルが教えるが如く，ことごとく失敗せざるを得なかったのは，その公準が内容にかかわるものであるがゆえになのである。

ランベルトは，こうした認識の上に立って，第一仮定の幾何学，つまりユークリッド幾何学の「表象および思惟の唯一可能性」を証明し，これによって同時に第十一原則の根本的性格，つまり「それ自身自明な基本概念からアプリオリに構成された基本命題(65)」であることを証明するために，ランベルトの言葉でいえば，「物理学の仮説を取り扱う方法(66)」すなわちサッケーリにおけると同様の間接的証明を遂行するのである。

小論では具体的な証明の過程の記述は省略するが(67)，ランベルトは，第二の「不可能なる仮定 die unmögliche Hypothese(68)」からは，二直線が一面分を囲むという不合理が生ずるゆえに，この仮定は「打倒」され(69)，また，第三の「不可能なる仮定」からは，一直線上に立つ複数の垂線が一点に合流するという不合理が生ずるゆえに「打倒」される(70)，ことをそれぞれ証明する。

ところでランベルトは，第二仮定の不可能性を証明する過程において，サッケーリよりも先に進んで，長さや面積の単位の絶対性，相似図形の非存在など，正の曲率をもつ非ユークリッド幾何学の諸定理とみなしうるものを導出することに成功している。このような定理の導出に際して示されるランベルトの寛容の精神は，しかし，導出された定理がユークリッド幾何学の原則そのもの（ここでは第十二原則）と明確に対立するに到るやいなや一変し，ユークリッド幾何学の原則の「表象と思惟可能性」に道を譲ることになってしまう。ランベルトのこうした態度は第三仮定に関しても変わることはない。「矛盾」を導出する過程において，「内角の和が三直角より小さい四辺形(71)」の出現に際しても，「直線という概念が完全に脱落してしまう(72)」場合にも，彼は寛容の精神を示し続けるけれども，ユークリッド空間において成立する事態（有限な間隔をもつ共通垂線の存在）と負の曲率をもつ空間において成立する事態（界円に内接する正多角形のそれぞれの頂点と中心を結ぶ諸線分に対する共通垂線の存在）を不用意に重ね合わせ，二者択一を迫られるやいなや，事態の「表象と思惟可能性」を断固として支持し，第一仮定の真理性を主張するのである。結局，ランベルトにとっても，非ユークリッド幾何学は存在を許されないものであり，ユークリッド幾何学のみが唯一真なる，しかも唯一思惟可能なる幾何学なのである。

さて，以上の考察から明らかになるのは，マルチンの示唆するような形では，カントにとって，公理の総合的性格を確信するに到る「楔」としての非ユークリッド幾何学は，単なる思惟可能性としてさえも与えられてはいなかった，ということである。ランベルトは言葉の上では，「事態の表象」と「思惟可能性」とを区別するが，近藤が明確に指摘しているように，前者のうちに後者が含みこまれてしまい，〈思惟可能ではあるが表象不可能なもの〉の思惟可能性は全然問題とされないのである。「非ユークリッド幾何学の思惟可能性は最初から無視(73)」されてしまうのであって，ランベルト

においては，表象可能性が，カントにおけるが如き「思惟可能な広大な領域を構成可能なものへと限定する契機(74)」としては全然働いていないのである。ランベルトにとって，空間も一つであるならば幾何学も一つなのであった。

カントにとって与えられていたのは唯ひとつの幾何学であったのであるが，彼がこの唯一の幾何学に対してその諸原則の総合的性格を主張するとき，まず思惟可能性と構成可能性の唆別を前提とするのである(A220/B268)。これは，カントの公理観が，単にライプニッツの公理観に対する批判という側面だけではなく，むしろランベルトの公理観に対する批判という側面をももつものであることを示している。しかしこの連関の精密な検討は，幾何学の総合的性格を構成する第二の契機，すなわち，幾何学の構成的性格の研究を心要とするのである。

注

1）『純粋理性批判』からの引用は慣例に従い，第一版はA――，第二版はB――で示す。尚，『プロレゴーメナ』は Prol.と略す。

2）近藤洋逸『新幾何学思想史』，1966，三一書房，67ページ以下，以下，近藤と略す。

3）岩崎武雄『カント「純粋理性批判」の研究』，1965，勁草書房，特に23ページおよび40ページ以下。

4）秋間実「ニュートン•カント•アインシュタイン」，荒川•秋間『現代科学の形成と論理』，1979，大月書店，所収。258ページ以下。

5）ライヘンバッハ，市井訳『科学哲学の形成』，1954，みすず書房，119ページ以下。

6）近藤，83ページ。

7）同所。

8）Martin, „Immanuel Kant“, 1969, W. d. Gruyter, S. 21, 門脇訳『カント』，1962，岩波書店，23ページ。

9）秋間，前掲論文，206ページ以下。

10）ヒルベルト David Hilbert (1862～1943)，中村訳『幾何学基礎論』，1943，弘文堂書房，241ページ。

11）第四命題に関する小論の記述は，中村•他訳，『原論』，1971，共立出版，および，彌永•他『ギリシアの数学』，1979，共立出版，に負っている。

12）ヒルベルト，前掲書，242ページ。

13）この訳は，彌永•他，前掲書，102ページにしたがった。中村・他訳版は「面分」でなく「面積」と訳している。

14）これは問題のある公理である。プロクロス，サボーはこれを公理として採らず，ハイベルグ・メンゲ版は，これを真正なものとは認めず，〔　〕に入れ，中村・他訳版および彌永・他はこれに従っている。これを公理として採用しているものにシュタマティス（„Euclides Elementa“, 1969-72, Leibzig）がおり，カントとランベルトも共にこれを「原則」のうちに数えている。尚，平行線の公準は正・負両曲率の空間において成立しないが，この公理は正の曲率の空間においてのみ成立しない。

15）彌永・他，前掲書，104ページ。

16）ヒルベルト，前掲書，242ページ。

17）パッシュ Moritz Pasch（1843～1930）に関する小論の記述は，ヒルベルト，前掲書によせられた中村の解説に負っている。

18）同書，243ページ。

19）同書，序，尚，ヒルベルトに関する小論の記述は，田村『数学の哲学』，1981，現代数学社，も参考にした。

20）ヒルベルト，「数の概念について」，前掲書所収，209ページ。

21）Martin, Ibid. ss. 19-20, 邦訳，22ページ。

22）Ibid. s. 21, 邦訳，24ページ。

23）Ibid.

24）近藤，211ページ参照。

25）Martin, Ibid. s. 20, 邦訳，23ページ。

26）近藤，58ページ。

27）マルチン，近藤両氏共にその所論の根拠を，エンゲルとシュテッケル『ユークリッドからガウスに到る平行線理論』，F. Engel u. P. Stäckel, „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“, 1895, Leibzig（以下，Engel u. Stäckel と略す）に求めている。小論の記述（IIIにおける）も本書および近藤に負うところ非常に大である。尚，本書の探索の際，金沢大学の土屋純一先生に大変お世話になった。

28）ハイベルグによれば，真正なものは五条のみ。これは，中村•他訳版の１，２，３，７，８である。

29）近藤，８～９ページ，念の為に平行線の定義ならびに公準を示しておく（中村・他訳版による)。

○定義(23)：同一平面上の二直線を両側に限りなく延長するとき，いずれの側においても相交わらぬものは平行である。

○公準(5)：一直線が二直線と相交わり，これらと同じ側において作る内角の和が二直線角よりも小であるならば，それら二直線は限りなく延長すれば，内角の和が二直角よりも小なる側において相交わる。

尚，プトレマイオスは Ptolemaios Claudios のことである。

30）近藤，210ページ以下，および，リーマン G. F. B. Rieman(1826～1866)，近藤訳，「幾何学の基礎をなす仮説について」，1973，中央公論社，世界の名著65，所収，285ページ以下，参照。

31）1851年10月31日付，ガウスの弟子ゲールリンクからボヤイ・ファルカシュ宛の手紙，近藤，164～165ページ。

32）これは，A. G. Kästner が示す，1770年までに出版された平行線公準の証明に関する著作の数である。近藤，11ページ，Engel u, Stäckel, s. 140.

33）Engel u. Stäckel, s. 37.

34）Ibid. サッケーリのテキストの表題：Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliunter prima ipsa universae geometriae principia，尚，独訳が Engel u. Stäckel, ss. 40-136 に収められている。

35）近藤，21ページ。

36）同所。

37）同書，12～13ページ。

38）同所。

39）Engel u. Stäckel, ss. 133～134.

40）Ibid.

41）サッケーリの証明は，近藤，22～36ページにその概略が，Engel u. Stäckel, ss. 48-133 にその全文が示されている。

42）Engel u. Stäckel, s. 67.

43）近藤，29ページ。

44）同書，34ページ，Engel u. Stäckel, s. 109.

45）近藤，37ページ。

46）同書，35ページ，Engel u. Stäckel, ss. 123-124.

47）近藤，36ページ，Ibid, ss. 129-130.

48）Ibid., s. 38.

49）Ibid., s. 39，クリューゲル Klügel の学位論文の表題：Conatuum praccipuorum theoriam parallelarum stabiliendi reccensio, Göttingen, 1763.

50）Ibid., s. 143.

51）Ibid., s. 142，尚，Johann Heinrich Lambert（1728～1777）の„Theorie der Parallellinien“は，Engel u. Stäckel, ss. 137-208 にその全文が収められている。

52）Ibid., s. 159, 近藤，53～54ページ。

53）Ibid., s. 158.

54）Ibid.，ランベルトはこのそれの反対の不可能性を示すという機能をもつ「原則」の真を「事態の表象」から証明するのみである。vgl., s. 155.

55）Ibid., ss. 153-155.

56）Ibid., s. 153.

57）Ibid., s. 155.

58）Ibid.

59）Ibid.

60）Ibid., s. 160.

61）Ibid., s. 162.

62）Ibid., s. 157.

63）Ibid.

64）Ibid.

65）近藤，46～50ページ参照。

66）Engel u. Stäckel, s. 177.

67）ランベルトの証明はその全文が Engel u. Stäckel, ss. 176-207 に，その概略が，近藤42～45ページに示されている。

68）Engel u. Stäckel, s. 177.

69）Ibid., s. 192.

70）Ibid., s. 207.

71）Ibid., s. 203.

72）Ibid., s. 204.

73）近藤，57ページ。

74）Martin, Ibid., s. 29, 邦訳，34ページ。