

カントにおける「幾何学」と「ユークリッド幾何学」

倉 持 武

序

カントの幾何学論が、平行線理論の研究に強い刺戟を与えたことは疑いがない。しかしその結果は、皮肉なことにと云おうか、カント自身の幾何学論の否定となったようにみえる。カントの理論を、「空間は経験に由来しない直観形式であり、幾何学の公理の示している性質をもたないような空間構造は直観的に構成不可能であるという理由から、それらの公理はアプリアリのものなのである⁽¹⁾」と要約し、この「公理」をユークリッド『原論』の存在措定と解するならば、非ユークリッド幾何学の成立は、カントの幾何学論を否定しているようにみえるのである。1832年、父ファルカス・ボヤイの『テンタメン』の「付録」として発表された、ヤーノス・ボヤイの「問題のユークリッドの第十一公理の（アプリアリには決して決定できない）真または偽とは無関係な空間論⁽²⁾」、および、ロバチェフスキーによる、1826年カザン大学数学・物理学会での口頭発表、そして、それに続く1829年カザン大学学術誌上での「幾何学の原理について」の発表⁽³⁾をもって、負の曲率を有する空間の幾何学が成立し、1854年6月10日、ゲッティンゲン大学におけるリーマンの試験講義「幾何学の基礎にある仮説について」によって⁽⁴⁾、正の曲率を有する空間の幾何学が成立する。

事態がたんに非ユークリッド幾何学の成立という段階にとどまっている場合ならば、この新しい幾何学はなるほど「思惟可能」なものではあるけれども、「構成不可能」であり、「客観的妥当性」を認めることはとうていできることではないと考

え、カントの幾何学論を支持し続けることも可能であったと思われる。しかし、1915年、アインシュタインによって「一般相対性理論」が発表されることによって事態は根本的に変化したように思われる。ユークリッド幾何学に対して、その唯一客観的妥当性が否定され、同時に、カントの幾何学論が根底から覆えられたようにみえるのである。すでに、1905年の「特殊相対性理論」において、時間と空間の関係が問い返えされていた。そして現在は、空間と物質との相互規定が主張されているのである。「重力の場は、空間および時間のうちに存在し、そのなかで変化する。そして、これらの場の諸性質が、こんどはその空間や時間に消しがたい印をつける。…ここに密接な相互作用が得られた。すなわち、質料が場を生み、場が質料の運動を制御するというのである。このような湾曲した四次元世界の幾何学は、もはやユークリッド的ではないであろう。実際には、空間のユークリッド性からのずれは、巨大な質料の近辺においてもごくわずかであるが、それでもなおこのずれこそが、宇宙構造の全体像を定めるのである⁽⁵⁾」と主張されているのである。

ところで、「非ユークリッド幾何学」あるいは「相対性理論」によってカントの幾何学論が覆えされたと主張する場合においてさえも、「覆えられた」とされる幾何学論を正確に把握することなしには、その主張は意味をもたない。論争にしろ議論にせよ、それぞれが相手の主張を正しく理解しなければ実りはない。それゆえ、カントを研究する者として私はこれまで、「カントと幾何学の公理⁽⁶⁾」において、幾何学の公理的性格に関するカン

トの考えを解明し、「幾何学の形而上学⁽⁷⁾」において、幾何学の構成的性格に関するカントの考えを、幾何学的認識は「概念の構成による理性認識である」という命題に限定して考察してきた。当論文はこれを受けたものであって、まず、「概念の構成による理性認識」であることの特性として幾何学的認識が有する「明証性」を、哲学的認識の有する確実性との対比において示す。ついで、幾何学の真理性が「明証性」にのみ基づくものであってはならず、「客観的妥当性」を有するものでなければ「学」としての幾何学たる資格を与えられないこと、を明らかにし、最後に、カントの幾何学論に対する諸批判を検討する場合、特に、非ユークリッド幾何学とカントの幾何学論との関係を正確に把握しようとする場合、カントの幾何学論の「原理」と「事実」を「方法」の観点から区別することの必要性を示そうと思う。

1 幾何学的判断の明証性

「空間の諸固有性を総合的に、しかもアプリアリに規定する一つの学^(A25, B41)」である幾何学は、純粹でアプリアリな概念（普遍）に対して、アプリアリな实例（個）を、アプリアリに与えること、すなわち、「概念に対応する直観をアプリアリに現示すること^(A713, B741)」による理性認識である。カントの幾何学論の核心をここにみるストローソンは、カントの幾何学論を「現象的幾何学 *phenomenal geometry*」とよび、「カントの純粹直観および純粹直観における概念構成の理論は、おそらく、少くともある点まではユークリッド幾何学の完全に合理的な哲学的説明であると解することができる」と評価し、存在指定の真理性を「公理が真であるのはそれが含む表現に付与される意味 *meanings* によってのみ」であり、「この意味は本質的に現象的、視覚的な意味であり、本質的に可描の意味」として説明可能にするものと考えている⁽⁸⁾。

カント自身、幾何学的判断のこうした特性を「徹底性 *Grundlichkeit*^(A726, B754)」とよび、幾何学の公理的体系を構成する定義、公理および論証に関してこれを解明し、同時に、これを通して幾何学の

公理的性格が、その構成的性格から帰結するものであることを示している。

定義 *Definition* を与えるということは、「あるものの手落ちなく詳細な概念を、その概念の限界内で根源的に提示する^(A721, B755)」ことである。数学的定義は、「根源的につくられた概念の構成」であり、「総合的に成立」し、それゆえ、「概念自身をつくる」ものであり、したがって「けっして誤ることのない」仕方で可能であるが、このことは、経験的概念の定義に対しても、哲学的概念の定義（哲学的定義）に対しても妥当しない⁽⁹⁾。

公理 *Axiom* とは、「直接的に確実である限りにおいての、アプリアリな総合的原則^(A732, B760)」のことである。数学は「対象の直観において概念を構成することを介して、その諸述語をアプリアリに直接的に連結^(A732, B760)」することができるがゆえに、「超越論的演繹 *die transzendente Deduktion*」を必要としない「明証的な原則 *der evidente Grundsatz*」たる「直覚的原則 *der intuitive Grundsatz*」すなわち公理をもつことができる^(A733, B761)。なお、ユークリッド幾何学における五つの公理（共通概念）は、それ自体としては分析判断であるが、それにもかかわらず幾何学において使用され得るのも、それらもまた「直観において現示される」がゆえになのである^(B17)。これに対して哲学は、アプリアリな総合判断として、超越論的演繹を欠くことのできない「論弁的諸原則 *die diskursive Grundsätze*^(A733, B761)」をもち得るだけである。「純粹悟性原則 *die Grundsätze des reinen Verstandes*」のひとつたる「直観の公理 *Axiom der Anschauung*」といえども、その「公理」という名称にもかかわらず、それ自身は「ドグマータ *Dogmata*」であって、「マテマータ *Mathemata*」たる公理ではあり得ない^(A736, B764)。それは「諸公理一般の可能性の原理を指示するために役立つ^(A733, B761)」にすぎない「概念からの原則 *ein Grundsatz aus Begriffen*」であって、「明証的 *evident*」つまり「直観的に確実 *anschauend gewiß*^(A734, B761)」ではない⁽¹⁰⁾。

そして、論証 *Demonstration* とは、「直覚的 *intuitiv* である限りにおいての当必然的証明 *ein*

apodiktischer Beweis_(A743, B762)」のことである。「経験 Erfahrung」は「現に存在するものの何であるかを私達に教えはするが、しかし、そのものが別様に存在することは全然あり得ないということをお教えはしない。だから、経験的証明根拠 die empirische Beweisgründe はいかなる当必然的な証明_(A734, B762)」も与えることはできないのである。さらに、哲学におけるアプリアリな諸概念からは、「どれほどその判断が当必然的に確実」であろうとも、そこから「直観的現実性」すなわち「明証性」が生じることはあり得ない⁽¹¹⁾。これに対して数学においては、それが幾何学的構成であろうと、「代数学における記号的構成 die charakteristische konstruktion_(A734, B762)」であろうと、「普遍的なものを個別的直観において具体的に」しかもアプリアリに考察することができるがゆえに、数学だけが論証を持つことができるのである_(A734, B761)。

2 純粋幾何学・応用幾何学

幾何学においては、第一に、自己整合性を矛盾律にしたがって認められた純粋諸概念、つまり思惟可能性を認められた純粋諸概念が、「諸表象をみずから産み出す能力 das Vermögen, Vorstellungen selbst hervorzubringen_(A51, B75)」であり、「概念の自発性 Spontaneität der Begriffe_(A50, B74)」である「悟性 Verstand」によって与えられる。

第二に、これら思惟可能な諸概念のなかで、「真理の論理学 eine Logik der Wahrheit_(A62, B87)」たる「超越論的論理学 die transzendente Logik_(A62, B86)」の基準を満たす諸概念だけが構成可能性を認められる。「真理の論理学」は本来、「経験一般の可能性の諸条件」、したがってまた「経験の諸対象の可能性の諸条件」を示す論理学であるが、幾何学に関して「真理の論理学」は、その第一純粋悟性原則「直観の公理：直観の公理の原理、すなわち、すべての直観は外延量 extensive Größe である_(B202)」を通して、「空間および空間の諸規定の諸条件_(A221, B268)」を示すことによって、思惟可能な諸概念に対する「超越論的真理性 die transzendente Wahrheit_(A222, B269)」の判定基準

として働くのである。カントにとって、「二角形」という無矛盾な、それゆえ思惟可能な概念が、それにもかかわらず構成不可能であることの根拠は、ここにある。概念「二角形」は超越論的に偽なのであって、幾何学においてその存在を指定することは不可能なのである_(A220, B268)。すなわち、カントは「思惟可能性」と「構成可能性」を、前者の判定基準を矛盾律（形式論理学）に求め、後者の判定基準を「真理の論理学（超越論的論理学）」に求めるという、判定基準として使用される論理学の差異に基づけて峻別し、純粋直観は幾何学において「たんなる補助的認識手段」などではあり得ず、幾何学の根であり幹であることを示し、さらに、超越論的論理学と共働することによって、「矛盾なしに考え得るものとしての論理的存在の広大な領域を、構成され得るものとしての数学的存在の狭小な領域へと制限すべき契機₍₁₂₎」として働いていることを示したのである。

したがって、カントにとって、幾何学は、純粋数学としてみられるならば、定義、共通概念、存在指定、および論証された諸定理から成る体系、その純粋でアプリアリな総合という点で、体系の一部始終が概念に対応する直観、つまりその概念の実例の「アプリアリな現示」によって貫かれた、直観的自明性を有する公理的体系である。

しかしカントは、応用数学から切り離されているという意味での純粋数学の自立を認めない。私達は幾何学において「現象としての諸対象についてのアプリアリな認識_(B147)」を獲得する。しかしこのことは「諸対象の形式_(B147)」からみただけのことであって、「この形式において直観されなければならない諸物が、はたして在り得るかどうか_(B147)」は、幾何学がアプリアリな総合判断の体系であることだけから決定することはできない。いかえれば、純粋幾何学は、それがいかに直観的に明証であるとはいえ、即自的にはたんなる「構想の産物 ein Produkt der Einbildung_(A223, B271)」にとどまるのである。幾何学が、「諸対象の形式」ではなくて、「対象」を与えられるためには、幾何学が「経験のすべての対象を基づける純粋な諸条件のもとで思惟されている_(A224, B271)」ことが必要

となる。「アプリアリな諸概念による諸物の可能性_(A223, B271)」は、直観ならびに概念からみて、「経験一般 Erfahrung überhaupt においてあるものを対象として規定する形式的諸条件と連関_(A224, B272)」づけられることによってはじめて与えられるのである。幾何学においては、「空間が外的な諸経験のひとつのアプリアリな形式的条件 eine formale Bedingung a priori von äußeren Erfahrung_(A224, B271)」であるということ、さらに、それを通じて構想力 die Einbildungskraft によって幾何学的概念を構成する「形成的総合 die bildende Synthesis_(A224, B271)」は、「現象についての経験概念 ein Erfahrungsbegriff をつくりあげるために、その現象の把握 die Apprehension einer Erscheinung において行使する総合と全面的に同じものである_(A224, B271)」ということ、これらのことを通してだけ、幾何学的概念とそうした「物の可能性についての表象_(A224, B271)」とが結合され得るのである。したがってカントは、幾何学者が、経験の可能性の諸条件や客観的妥当性如何の問題には無関心に幾何学することを認めるであろう。カントにとって、幾何学の可能性を究明し、幾何学に客観的妥当性を保証することができるのは、幾何学を哲学する者、すなわち、哲学者だけであるのだから。

3 意図、原理、事実、方法

カントは「幾何学」が客観的妥当性を有するアプリアリな総合判断の体系であるということ、このことだけを証明したのであろうか。唯一ユークリッド幾何学のみしか与えられていなかったカントの「意図」としては、まさにそのとおりであろう。ランベルトさえもが、ユークリッド幾何学が唯一真なる、そして、唯一思惟可能なる幾何学であることを証明した事実を踏まえるとき、カントの意図が「幾何学そのもの」の究明にあったのであって、「多くの幾何学のうちのひとつとしてのユークリッド幾何学」の究明にあったのではなく、「普遍幾何学に包摂される、一特殊幾何学としてのユークリッド幾何学」の究明にあったのではないことは全く明らかなことである。カントにとっ

て、「多くの幾何学」あるいは「普遍幾何学」という観念の成り立つ余地は全くなくて、ユークリッド幾何学が唯一にして全なる幾何学であったのである。

ところで、カントにとって構成可能なものとしての幾何学的存在は、「事実上」、ユークリッド的空間およびこの空間の中で構成される諸々の図形に限られている。このことは、拙論「幾何学の形而上学」において取り上げた、幾何学者に「三角形について幾何学させた」ときに与えられた問題が、ユークリッドの『原論』の第三十二定理の証明を求めるものであること、この定理は三角形の内角の和が二直角に等しいことを示すものであり、しかも、この定理の証明に平行線の一意的存在を指定する公準、いわゆる「平行線の公理(『原論』の第五の存在指定)」を使用する、ユークリッド幾何学のみにおいて成立する諸定理のなかでも特に典型的にユークリッド的な定理であること、ならびに、構成可能な直線図形が三つ以上の直線によって囲まれるものに限られ、このことはまた、『原論』の第十九定義に対応していること、とから見て取ることができる。したがって、事実上は、カントは「幾何学がアプリアリな総合判断の体系であること」を究明したのではなく、「幾何学はアプリアリな総合判断の体系であり、かつ、ユークリッド的なものであること」を究明したのである。

しかし、カントの幾何学論の「原理」、つまり、概念の実例の「純粹直観におけるアプリアリな現示」ならびに構成可能性の判定基準としての超越論的論理学とによる幾何学の基礎づけ、だけから、幾何学がユークリッド的でなければならない必然性は帰結しない。原理から帰結するのは、すべての直観は外延量であること、この外延量は「延長(拡がり)」と「形態的なもの」を有し、「外在性」や「並存性」など若干の位相的特性を示し、したがって二つ以上の次元を有すること、および、これらの事態を表現する諸命題を公理として成立する極めて貧弱な位相幾何学であろう。

「純粹理性の普遍的課題_(B19)に含まれる、「いかにして純粹数学は可能であるのか」という問の中

で「純粋数学」が指示しているもののひとつが「ユークリッド幾何学」であり、「いかにして純粋自然科学は可能であるのか」という問の中で「純粋自然科学」が指示しているものが、『自然科学の形而上学的原理』(1786年)において展開される「運動学」、「動力学」、「力学」および「現象学」というアプリアリな自然科学であり、また、それらを通して最終的に目指されるニュートン力学的世界であり、さらに、これらの諸物理学がいずれもその幾何学的枠組としてユークリッド空間を前提しているという事実⁽¹³⁾によって、「原理」から帰結する幾何学の貧弱さが覆い隠されてしまうのである。

カントの幾何学の基礎づけの「原理」のみからは幾何学がユークリッド的でなければならないことの必然性は帰結しないということは、カントは『純粋理性批判』において、「理性そのものの他には、まだ何ものをも所与として基礎におかず、したがって、どのような事実にも基づくことなく、認識をその根源的な萌芽から展開する」という「総合的方法 die synthetische Methode⁽¹⁴⁾」を用いてのユークリッド幾何学の基礎づけには成功していないことを示している。しかし、『純粋理性批判』においても、事実上は、既に幾何学が「現実」に、したがってその「可能性」も当然、与えられていることを前提して、この「可能性の根拠を究め、この認識の可能性の根拠から、「この認識の使用条件、使用の範囲および限界を規定する」という「分析的方法 die analytische Methode⁽¹⁵⁾」が採られているという解釈のもとならば、カントはユークリッド幾何学の解明と、ユークリッド空間の「超越論的観念性 die transzendente Idealität^(A28, B44)」の証明に、しかも「物自体」の問題とかかわることのない仕方、しかし、ユークリッド空間にさえ「経験的実在性 die empirische Realität^(A28, B44)」を帰属させ得ない仕方ではあるが、「事実上」、成功しているといえるのである。それは、一方、ユークリッド幾何学の「現実存在」からはカントの「基礎づけの原理」が分析的に帰結することは明らかであるし、他方、この「基礎づけ」が「分析的方法」によるものであることか

ら、「私達が実在的空間を経験的にユークリッド的なものとしてみていること」は、原理に基づいてのことではなくて、たんに事実上あるいはこれまでの経験上、そうであるのにすぎないのであって、むしろ「事実」から「原理」が分析的に導出されているのであるから、「原理」は「事実」の「経験的実在性」を証明することは不可能であること、が帰結するからである。

思惟可能性と構成可能性を峻別したカントも、「幾何学」と「ユークリッド幾何学」を区別すること、および、「純粋自然科学(理論物理学)」とニュートン力学に含まれる「公理」または「運動の法則」とを区別することはできなかった⁽¹⁶⁾。これは確かにカントの生きた時代による制約というものではあろうが、このことはカントの幾何学の基礎づけに関して、カントの意図、原理、事実および方法、この四者の間に無視することのできない食い違いを引き起こしているのである。上述したことの他にも、例えば、カントが「二直線に囲まれた図形」という思惟可能な概念に対して、その構成可能性を否定する場合、カントはこの構成不可能性を、純粋直観ならびに超越論的論理学から原理的に証明しているのではなくて、その概念はユークリッド幾何学の公理群とは両立しないという事実、つまり、ユークリッド幾何学は唯一真なる幾何学であるのだから、それは幾何学の概念ではないのだという事実を語っているにすぎないのである。もしこのことをたんなる事実の記述としてではなく、証明として示そうとするならば、「直観の公理」は、「すべての直観は外延量である」という「原理」だけを与えるものであってはならず、外延量の直観がその構成において何故ユークリッド的でなければならないのか、その必然性を、いいかえれば、純粋直観のメトリックがユークリッド的でなければならない必然性を、明示する具体的な公理もしくは公理群を、すくなくともカントは提示しなければならなかったのである。

4 結 論

私は、正・負固定および可変曲率のユークリッド幾何学が理論として成立していること、両者の

モデルが構成されていること、ヘルムホルツ⁽¹⁷⁾およびポアンカレ⁽¹⁸⁾によって非ユークリッド空間の知覚的描写が、特にポアンカレによって説得力豊かに、与えられていること、および、一般相対性理論において四次元可変曲率連続多様体が理論構成の幾何学的枠組として使用されており、この理論を否定する場合、地球などの重力場における光の赤方偏移の値、太陽重力場を通過する際の光の湾曲率の値、水星の近日点移動率、を説明することが不可能になること⁽¹⁹⁾、そして、実用的見地からいっても、人工衛星を用いた非常に正確な航法システムを利用する際、特殊および一般相対性理論に基づく予測を無視するならば、現実の位置規定が計算上の位置規定から何マイルも狂ってしまう⁽²⁰⁾という事実、等々からみて、非ユークリッド幾何学も、もしユークリッド幾何学が客観的妥当性を有するならば、これと同一の仕方で客観的妥当性を有し、カントの幾何学論の原理と両立する形で、構成可能であると、考えざるを得ないと思っている。

他方、ブラウワーをはじめとする直観主義者達自身が「ユークリッド幾何学を一意かつアプリアリかつ総合的言明の体系とするような、自己明証

的で厳密で限定的な空間直観が存在するというカントの主張」を拒否している⁽²¹⁾。

また、ライヘンバッハは、純粋数学としての幾何学的言明は、「もし公理が真であれば、定理も真であるという伴立形式」をとり、この「伴立関係は分析的」であるがゆえに、体系としては分析判断の体系であると主張し⁽²²⁾、実証主義的な幾何学の二分法の立場から、直観的に了解可能な空間あるいは延長空間の幾何学、つまり直観幾何学⁽²³⁾の可能性そのものを否定している。

このようにカントの幾何学論に対して多方面から、そして様々な仕方での批判が提出されている。ここでこれらの批判を吟味することはしない。しかし、これらの批判を検討する場合には、その批判が、カントの幾何学論の意図に対するものなのか、原理に対してか、事実に向けられているのか、それとも方法に対するものなのかを、明確にすることから出発しなければならないこと、したがって、カントの幾何学論を展開しようとする者自身が、まず、カントの幾何学論の意図、原理、事実および方法の四者を明確に識別することの必要性は示すことができたとと思う。

◀ 注 ▶

- 1) 近藤洋逸, 『新幾何学思想史』, 三一書房, 1966, 98ページ
- 2) 同書, 136ページ
- 3) リワノワ, 『リーマンとアインシュタインの世界』, 松野・他訳, 東京図書, 1975, 5～6ページ
- 4) 同書, 21ページ
- 5) 同書, 145ページ
- 6) 松本歯科大学紀要 一般教養 第11輯
- 7) 名城商学 人文科学特集 第39巻別冊
- 8) Strawson, P.F., "The Bounds of Sense", Methuen & Co Ltd., 1973, pp.281～282 邦訳, 『意味の限界』, 熊谷・他訳, 勁草書房, 1987, 338～339ページ
- 9) A727～732, B755～760 (『純粹理性批判』からの引用は慣例にしたがい、第一版はA——, 第二版はB——で示す。)
- 10) A733, B761

- なお, „anschauend gewiß“と„diskursiv gewiß“とが対照的に使用される場合には, ①数学的悟性原則の確実性と力学的悟性原則の確実性を比較する場合(A162, B201)と, ②数学自身の原理の確実性と数学的悟性原則の確実性を比較する場合とがあるが, この文脈においては②の仕方を用いられ, „anschauend gewiß“は„evident“と同義的に用いられ, 悟性原則に対して„anschauend Gewißheit“が拒否されている。
- 11) A734, B762, 前注参照
 - 12) Martin, G., „Immanuel Kant“, W. de Gruyter, 1969, S.29
邦訳, 『カント』, 門脇訳, 岩波書店, 1967, 34ページ
 - 13) この指示関係と事実の「純粹理性の普遍的課題」への連関を理解する上で, カッシーラーの以下の指摘を示しておくことが必要と思う。「超越論的哲

学もやはり、対象性の様々な形式を取り扱おうとし、またそうしなければならない。しかしすべての対象的形式は、一定の認識形式の媒介によって、はじめて超越論的哲学にとって把握可能な近づき得るものとなる。超越論的哲学が関与し関係する実質は、それゆえ常に何らかの仕方ですでに形式化された実質である。幾何学あるいは数学的物理学の媒介を通してみられた『現実性』がいかに示されるか…ということこそ超越論的分析が発見し解釈しようとすることに他ならない。」

Cassirer, E., „Kants Leben und Lehre“, Hildesheim, 1973, S.165

邦訳、『カントの生涯と学説』, 門脇・他監修, みすず書房, 1986, 162ページ

14) Prolegomena § 6

15) Ibid. § 5

16) B17および B21参照

17) 秋間・荒川, 『現代科学の形成と論理』, 大月書店, 1979, 237~240ページ

18) ボアンカレ, 『科学と仮説』, 河野訳, 岩波文庫, 1959, 92~99ページ

19) ゼックスル, 『白色矮星とブラックホール』, 岡村・他訳, 培風館, 1985, 10~23ページ

20) ホーキング, 『宇宙を語る』, 林訳, 早川書房, 1989, 57ページ

21) ケルナー, 『数学の哲学』, 山本訳, 公論社, 1987, 208ページ

22) ライヘンバツハ, 『科学哲学の形成』, 市井訳, みすず書房, 1966, 135ページ

23) 田村祐三, 『数学の哲学』, 現代数学社, 1981, 9ページ